



TITLE:

多段グラフの平面性判定アルゴリズム (計算機科学の数学的基礎)

AUTHOR(S):

富井, 規雄; 上林, 弥彦; 矢島, 脩三

CITATION:

富井, 規雄 ...[et al]. 多段グラフの平面性判定アルゴリズム (計算機科学の数学的基礎). 数理解析研究所講究録 1978, 322: 230-263

ISSUE DATE:

1978-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104023>

RIGHT:

多段グラフの平面性判定アルゴリズム

京都大学工学部

富井 規雄

上林 弥彦

矢島 脩三

1. はじめに

ここでは多段グラフというグラフを導入し、その平面性判定のアルゴリズムについて考察する。従来よりグラフの平面性の判定に関しては、多くの研究がなされいくつかの線形アルゴリズムが見出されている。[HOPC74], [RUBI75], [BOOT76]。しかし、ここで述べる多段グラフは主としてその応用上の観点から、平面描写の方法を制限しているため 従来の平面性判定の手法をそのまま用いることはできない。

多段グラフは、多段的構造をもつ対象をあらわすモデルとして導入されたものであり、その平面性の判定はプリント基板やLSIの設計および論理回路図やISM (Interpretive Structural Modeling) の map [WARF77], 文献の参照構造

図 [KAMBE77] 等各種の図を描く際に有用であると思われる。

多段グラフ $G^m = (V, E, m)$ とは次のようなグラフである。

1. 節点集合 V は m 個の部分集合 V_1, V_2, \dots, V_m からなり $i \neq j$ のとき $V_i \cap V_j = \emptyset$ である。
2. 枝集合 E は $m-1$ 個の部分集合 E_1, E_2, \dots, E_{m-1} からなり $i \neq j$ のとき $E_i \cap E_j = \emptyset$ である。
また $\forall e \in E_i$ は V_i の節点と V_{i+1} の節点とを結ぶ。
($i = 1, 2, \dots, m-1$)

なお、その節点集合が m 個の互いに共通な要素を含まない部分集合 V_1, V_2, \dots, V_m からなる多段グラフは m 段グラフとよばれる。

m 段グラフ $G^m = (V, E, m)$ ($V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m$, $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{m-1}$) を平面に描写する際には次の方法による。

1. 順に l_1, l_2, \dots, l_m と名付けられた m 本の平行な直線上に 節点部分集合 V_i に属する節点は直線 l_i 上にあるように配置する。
2. 枝は直線に限る。 (例を図1に示す)。

m 段グラフは上述の平面描写の下で枝の交差なく平面に埋めこめる時 平面的であるという。

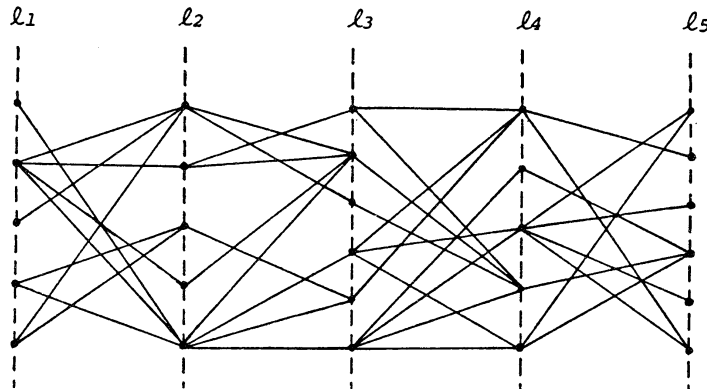


図1. 5段グラフの例

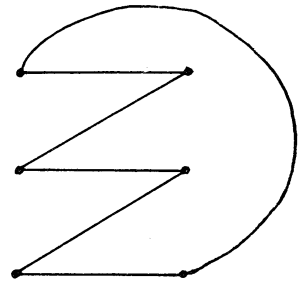


図2. 2段グラフとしては許されない平面描写

[注意] m 段グラフの平面描写において 枝を直線に限るという制約は便宜的なものである。すなわち、この制約は図2に示されるようなグラフの“外側”を通る枝を許さないという意味を持っており、それ以外の一般性を失うものではない。

本稿ではまず $m=2$ の場合の m 段グラフすなわち 2 段グラフの平面性の必要十分条件について述べる。2 段グラフ G^2 が平面的であるための必要十分条件は G^2 が C-tree であることである。ここで C-tree とは「端節点をすべて除くと残った木が 2 個以下の端節点をもつようになる木」のことをいう。

(図3). これを用いて 2 段グラフの平面性判定の線形アルゴリズムが得られる。 m 段グラフ $G^m = (V, E, m)$ ($V = V_1 \cup V_2 \cup \dots$

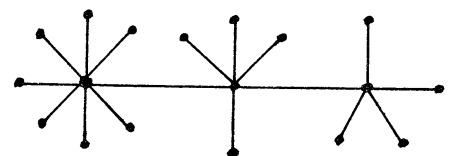


図3. C-tree の例

$\cup V_m, E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{m-1}$) が平面的であるためには G^m の $m-1$ 個の部分 2 段グラフ $G_1^2 = (V_1 \cup V_2, E_1, 2), \dots,$

$G_{m-1}^2 = (V_{m-1} \cup V_m, E_{m-1}, 2)$ がすべて平面的でなければならぬ。
しかし図4に示すようにこれは十分条件とはなり得ない。

すなわち図4において3段グラフ

$$G^3 = (V_1 \cup V_2 \cup V_3, E_1 \cup E_2, 3)$$

2つの部分2段グラフ $G_1^2 = (V_1 \cup V_2, E_1, 2)$,

$G_2^2 = (V_2 \cup V_3, E_2, 2)$ は共に

平面的な2段グラフであるが、 G_1^2 ,

G_2^2 からなる G^3 は非平面的な3段グラフ

である。これは G_1^2 , G_2^2 の2つの

部分グラフの両方の平面性を保つよ

うな V_2 の節点の並びが存在しな

いためである。従って、 m 段グラフ

G^m が平面的であるための必要十分

条件は、

(1) G^m の $m-1$ 個の部分2段グラフ $G_1^2 = (V_1 \cup V_2, E_1, 2)$,

$\dots, G_{m-1}^2 = (V_{m-1} \cup V_m, E_{m-1}, 2)$ がすべて平面的で

あり、かつ

(2) G_1^2, \dots, G_{m-1}^2 のすべての平面性を保つような $V_2, \dots,$

V_{m-1} の節点の並びが存在すること。

である。

m 段グラフ G^m の $m-1$ 個の2段グラフ G_i^2 ($i=1, 2, \dots, m-1$)

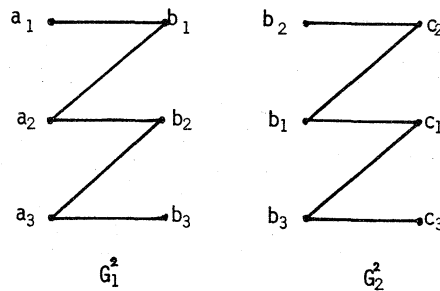
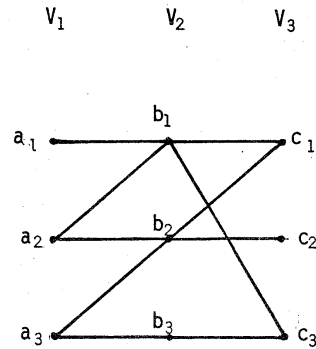


図4 部分グラフは平面的であるが全体のグラフは非平面的なグラフの例

から孤立節点を除いてえられる 2 段グラフ $G_i^{2'}$ がすべて連結である時, G^m は段連結な m 段グラフとよばれる. 段連結な m 段グラフの平面性はとなりあう 2 つの部分 2 段グラフ どのような関係をしらべるだけで判定できることが証明される. すなわち $i=2$ から $m-1$ につき, $G_{i-1}^{2'}$ と $G_i^{2'}$ の両方の平面性を保つような V_i の節点の並びが存在するかどうかを調べればよい.

しかし, 一般の m 段グラフの場合は各々の部分 2 段グラフの連結成分の方向が隣接する 2 段グラフのみからは一意的に決定できない. すなわち連結成分の方向はグラフ全体から決定する必要がある. この問題を解決するために, ここでは PQR-tree というデータ構造を導入する. PQR-tree は各 2 段グラフに対してそのグラフの平面性を保つような両側の節点の並びを表わすように構成される. 従って, m 段グラフの平面性は 2 段グラフ $G_i^{2'}$ の右側の節点 (V_i) について構成された PQR-tree と $G_{i+1}^{2'}$ の左側の節点 (V_i) について構成された PQR-tree とが同一の節点の並びを表わすかどうかを調べることにより判定される.

2. 基本的定義

[定義] m 段グラフ $G^m = (V, E, m)$ とは次のような無向単純グラフである.

1. V は節点集合であって, $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m$ かつ $i \neq j$ の時 $V_i \cap V_j = \emptyset$ である.
2. E は枝集合であって, $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{m-1}$ かつ $i \neq j$ の時 $E_i \cap E_j = \emptyset$ である. また $\forall e \in E_i$ は V_i の節点 v と V_{i+1} の節点 w とを結ぶ. ($i = 1, 2, \dots, m-1$)

m 段グラフの定義から次の定理が得られる.

[定理 1] m 段グラフは奇サイクルを含まない.

(証明) もし G^m が m 段グラフならば, その節点集合 V は m 個の部分集合 V_1, V_2, \dots, V_m に分割され, G^m の枝はどれも V_i の節点と V_{i+1} の節点を結んでいる. ($i = 1, 2, \dots, m-1$)
したがって, G^m の任意のサイクル $v_1 v_2 \dots v_l v_1$ に対し ($v_1 \in V_k$ とする) V_{k+2l} は奇数の添字をもつ節点のみを含み, V_{k+2l+1} は偶数の添字をもつ節点のみを含む. ゆえにその長さ l は偶数である. (ここで l は整数, かつ $1 \leq k+2l+1, k+2l \leq m$) (証明終)

[定義] m 段グラフ $G^m = (V, E, m)$ ($V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m$,

$E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{n-1}$ は次の手法により 平面上に描写される.

1. 平面上に順に l_1, l_2, \dots, l_n と名付けられた n 本の直線を平行にひき (これらの直線を 節点直線 としう) 節点部分集合 V_i に属する節点は直線 l_i 上に配置する.
2. 枝は直線で描く.

5 段グラフの平面描写の例が図1 に示されている. 以下では混同を避けるため, 必ずしも節点直線は描かないが, l_1, l_2, \dots, l_n はその順に 縦に並べられているものとする.

[定義] n 段グラフ G^n は上述の平面描写のもとで, 適当に節点の順序をいれかえて枝の交差なく平面に埋めこむことができる時, 平面的であるという.

n 段グラフの平面性は上述の定義にしたがって判定される. 従って 図5(a)に示すグラフは一般の 2 組グラフとして見た時は平面的なグラフ (b) のようにかきなおすことができる) であるが, 2 段グラフとして見た場合には, "外側" を通る枝は許されないため 非平面的な 2 段グラフと判定

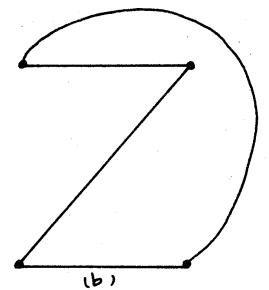
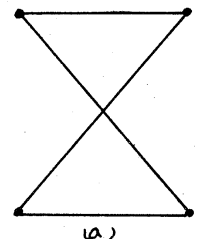


図5 平面 2 組グラフであるが非平面 2 段グラフである例.

される。

他のグラフ理論上の用語や記法は [HARA69] および [DEO74] にしたがう。

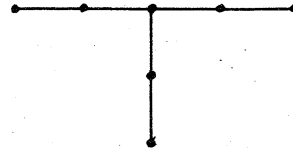


図6 Tグラフ

3. 2段グラフの平面性判定

この節では $m=2$ の場合の m 段グラフ, すなわち 2 段グラフが平面的であるための必要十分条件について考察し, 2 段グラフの平面性判定アルゴリズムを与える. このアルゴリズムは 4 節で述べる m 段グラフの平面性判定アルゴリズムにおいて利用される. (なお, この節の定理・補題の証明は [TOMI77 87], [TOMI7711] に述べられている).

[補題 1] 平面的な 2 段グラフはサイクルを含まない.

[系] 連結 2 段グラフ G^2 は木 (tree) である. よって G^2 が $|V|$ 個の節点, $|E|$ 本の枝を含むならば $|V| = |E| + 1$ が成立する.

[補題 2] 平面的な 2 段グラフは図 6 に示す T グラフをその部分グラフとして含まない.

[定義] C-tree とは「すべての端節点を除いた時に, 残った木が 2 個以下の端節点をもつような木」のことをいう.

また C -tree からすべての端節点を除いてえられる木をその C -tree の 幹 (trunk) という。

[例] C -tree の例を図 7 に示す。

[定理 2] 連結な 2 段グラフ G^2 が
平面的であるための必要十分条件

は, G^2 が C -tree であることである。

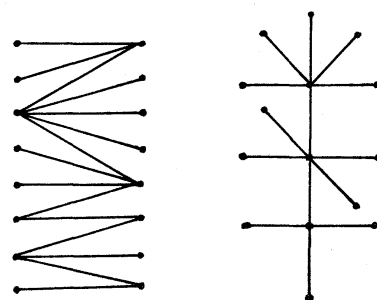


図 7 C -tree の例

定理 2, 補題 1 より次に述べる 2 段グラフの平面性判定アルゴリズムがえられる。

アルゴリズム 1

入力: 連結 2 段グラフ $G^2 = (V, E, 2)$

出力: G^2 が平面的であるかどうか

手法: 1. $|V| \geq |E| + 1$ ならば G^2 は非平面的な 2 段グラフである。

2. G^2 の端節点をすべて除く。残ったグラフが 2 個以下の端節点をもてば G^2 は平面的な 2 段グラフ,

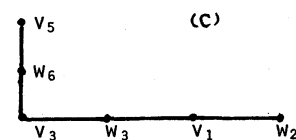
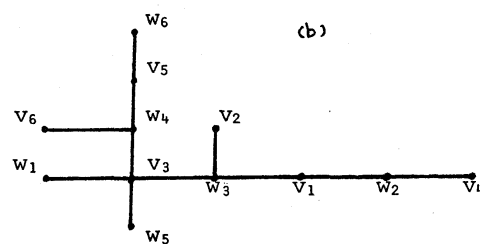
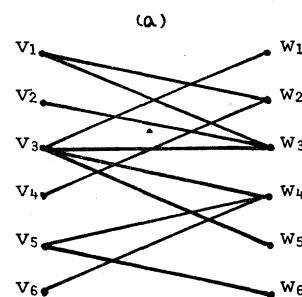


図 8 アルゴリズム 1 の例

そうでなければ G^2 は非平面的な 2 段グラフである。

[例] アルゴリズム 1 の例を図 8 に示す。(a) は入力グラフ G^2 , (b) は G^2 をかきかえたもの, (c) は G^2 からすべての端節点を取り除いて得られるグラフ $G^{2'}$ である。この例では $G^{2'}$ が 2 個の端節点をもつグラフであるので, G^2 は平面的な 2 段グラフと判定される。

[定理 3] アルゴリズム 1 は $|V|$ 個の節点をもつ 2 段グラフの平面性を $O(|V|)$ の手数で判定する。

4. 多段グラフの平面性判定

4.1 多段グラフの平面性の必要十分条件

この節では, m 段グラフが平面的であるための必要十分条件を与える。 m 段グラフはその連結成分がすべて平面的である時およびその時のみ平面的である。従って以下では連結なグラフのみを対象とする。 m 段グラフ $G^m = (V, E, m)$ ($V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m$, $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{m-1}$) は $m-1$ 個の部分 2 段グラフ $G_1^2 = (V_1 \cup V_2, E_1, 2), \dots, G_{m-1}^2 = (V_{m-1} \cup V_m, E_{m-1}, 2)$ からなると考えられる。 m 段グラフ G^m が平面的であるためには G^m の $m-1$ 個の部分 2 段グラフ $G_1^2, G_2^2, \dots, G_{m-1}^2$

がすべて平面的であることが必要である。しかし、図4で示したように、さらに G_1^2, \dots, G_{n-1}^2 のすべての平面性を保つような節点の並びが V_2, V_3, \dots, V_{n-1} の各々について存在することが必要である。この概念を明確にするために次に平面2段グラフに対する「節点順列対」という概念を定義する。

[定義] 平面的な2段グラフ $G^2 = (V_1 \cup V_2, E, 2)$ の1つの平面描写の節点順列対とは 節点直線 ℓ_1 上の V_1 の節点の順列 p と節点直線 ℓ_2 上の V_2 の節点の順列 q との順序対 (p, q) のことである。 G^2 のすべての平面的な描写に対する節点順列対の集合を $\Pi(G^2)$ であらわす。また上述の p を左節点順列、 q を右節点順列 とし G^2 のすべての平面的な描写に対する p, q の集合をそれぞれ $\Pi^L(G^2), \Pi^R(G^2)$ であらわす。

[例] 節点順列対、右、左節点順列の例を図9に示す。節点順列対は $(p, q) \in \Pi(G^2)$ ならば V_1 の節点を p で、 V_2 の節点を q でならべたような G^2 の平面的な描写が存在するという

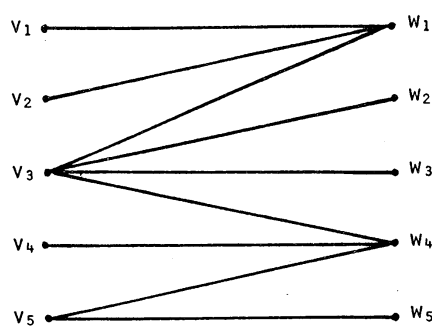


図9. 節点順列対の例

$$\begin{aligned} p_1 &= (v_1 v_2 v_3 v_4 v_5) & q_1 &= (w_1 w_2 w_3 w_4 w_5) \\ p_2 &= (v_2 v_1 v_3 v_4 v_5) & q_2 &= (w_1 w_3 w_2 w_4 w_5) \\ p_3 &= (v_5 v_4 v_3 v_2 v_1) & q_3 &= (w_5 w_4 w_3 w_2 w_1) \\ p_4 &= (v_5 v_4 v_3 v_1 v_2) & q_4 &= (w_5 w_4 w_2 w_3 w_1) \end{aligned}$$

$$\Pi^L(G^2) = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$$

$$\Pi^R(G^2) = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$$

$$\Pi(G) = \{(p_1, q_1), (p_1, q_2), (p_2, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3), (p_3, q_4), (p_4, q_3), (p_4, q_4)\}$$

意味をもつ。

[定理4] 連結な m 段グラフ $G^m = (V, E, m)$ ($V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m$,

$E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{m-1}$) が平面的であるための必要十分条件は

(1) G^m の $m-1$ 個の部分2段グラフ $G_i^2 = (V_i \cup V_{i+1}, E_i$,

2) ($i = 1, 2, \dots, m-1$) がすべて平面的な2段グラフであり,

かつ (2) 次のような性質をもつ $m-1$ 個の節点順列列が存在することである.

$(p_i, g_i) \in \Pi(G_i^2)$ ($i = 1, 2, \dots, m-1$)

かつ $g_i = p_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, m-2$).

(証明) G_i^2 ($1 \leq i \leq m-1$) が非平面的なら G^m が非平面的であることは明らかである.

また $g_i \neq p_{i+1}$ ($1 \leq i \leq m-2$) ならば G^m の部分3段グラフ $G^3 = (V_i \cup V_{i+1} \cup V_{i+2}, E_i \cup E_{i+1}, 3)$

は平面的な3段グラフとはなり得ない. よって G^m は非平面的となる.

また条件(1), (2) が成立すれば $(p_1, g_1) \in \Pi(G_1^2)$

だから2段グラフ G_1^2 を V_1 の順列 p_1 , V_2 の順列 g_1 で平面的に描写することができる.

$(p_2, g_2) \in \Pi(G_2^2)$ だから2段グラフ G_2^2 を平面的に描写することができ, しかも $g_1 = p_2$

であるから3段グラフ $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2 \cup V_3, E_1 \cup E_2, 3)$ を平面的に描写できる.

この手続きをくり返すことにより,

m 段グラフ G^m を平面的に描写できる. (証明終)

段連結とよばれる性質をもつ m 段グラフに対しては, 定理

4 はより簡単に述べられる.

[定義] m 段グラフ $G^m = (V, E, m)$ の $m-1$ 個の部分 2 段グラフ $G_i^2 = (V_i \cup V_{i+1}, E_i, 2)$ ($i = 1, 2, \dots, m-1$) から孤立節点を除いてえられるグラフ $G_i^{2'}$ がすべて連結である時, G^m は段連結な m 段グラフであるという.

連結平面 2 段グラフの場合は, 左節点順列と右節点順列は互いに独立である. すなわち次の補題が成立する.

[補題 3] $\Pi^L(G^2)$ から任意の要素 p , $\Pi^R(G^2)$ から任意の要素 q を選んだ時, V_1 の節点が節点直線 ℓ_1 上に順列 p で並べられ, V_2 の節点が節点直線 ℓ_2 上に順列 q または q の逆順列でならべられたような G^2 の平面的な描写が存在する.

(ただし G^2 は平面的な連結 2 段グラフ)

(証明 は略する. [TOMI7802] 参照).

[注意] 補題 3 は非連結な平面 2 段グラフに対しては必ずしも成立しない.

段連結 m 段グラフの定義より, G^m が段連結 m 段グラフである場合にはその $m-1$ 個の部分 2 段グラフ G_i^2 から孤立節点を除いてえられるグラフ $G_i^{2'}$ はすべて連結である. ($i = 1, 2, \dots, m-1$) 従って段連結 m 段グラフの平面性の必要十分条件は次のように述べられる.

[定理 5] 連結かつ段連結な m 段グラフ $G^m = (V, E, m)$ ($V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m$, $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{m-1}$) が平面的であるための必要十分条件は (1) G^m の $m-1$ 個の部分 2 段グラフ $G_i^2 = (V_i \cup V_{i+1}, E_i, 2)$ がすべて平面的であり ($i = 1, 2, \dots, m-1$) かつ (2) $\Pi^R(G_{i-1}^2) \cap \Pi^L(G_i^2) \neq \emptyset$ ($i = 2, 3, \dots, m-1$) である: とである.

(証明) [必要性] ある i に対して G_i^2 が非平面的であるなら明らかに G^m は非平面的である. またある i について $\Pi^R(G_{i-1}^2) \cap \Pi^L(G_i^2) = \emptyset$ であるなら G^m の部分グラフである $G^3 = (V_i \cup V_{i+1} \cup V_{i+2}, E_{i-1} \cup E_i, 3)$ は平面的ではありえない. 従って G^m も平面的な m 段グラフとはなりえない.

[十分性] 条件 (1), (2) が成立すれば, $m-2$ 個の節点順列 p_2, p_3, \dots, p_{m-1} ($p_i \in \Pi^R(G_{i-1}^2) \cap \Pi^L(G_i^2)$) が存在する. G_i^2 から孤立節点を除いて得られるグラフ $G_i^{2'}$ は連結であるから補題 3 より節点順列対 (p_i, p_{i+1}) は $G_i^{2'}$ の平面的な描写を実現する. (孤立節点は $G_i^{2'}$ の平面性をそこなうことなく任意の位置に付加することができる). よって G^m を平面的に描写できる.

(証明終)

4.2 段連結な m 段グラフの平面性判定アルゴリズム

定理 5 の示すところにより段連結な m 段グラフの平面性は

(4) その $m-1$ 個の部分 2 段グラフの平面性と (2) となりあう 2 つの部分 2 段グラフ G_{i-1}^2 と G_i^2 がその平面性を保ったまま で結合できるかどうか ($i=2, 3, \dots, m-1$) を調べればよいこと になる. 条件 (2) を別の面から考察する. 平面的な 2 段グラフ $G^2=(V_1 \cup V_2, E, 2)$ はその節点部分集合 V_1, V_2 の各々に "半順序" を定義すると考えられる. 即ち, その半順序を満たす ように節点を配置すれば G^2 が平面的 に描写されるような半順序である.

例えば図 10 のグラフにおいては節点 部分集合 V_1 には半順序 \succeq が存在

し, V_1 の節点は $a_1 = a_2 \succeq a_3 \succeq a_4,$

$a_5 \succeq a_6 \succeq a_7 = a_8$ と順序づけられ

ている. 同様に V_2 には半順序 \succeq

が存在し V_2 の節点は $b_1 \succeq b_2 \succeq b_3, b_4 = b_5 = b_6 \succeq b_7$ と 順序づけられている.

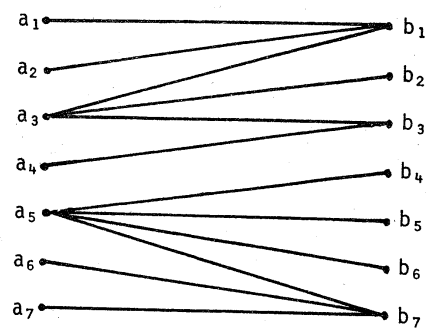


図 10 半順序を示すための 平面 2 段グラフ

m 段グラフにおいては 節点部分集合 V_i の節点は部分 2 段グラフ G_{i-1}^2 と G_i^2 の 2 つのグラフに属している. 従って V_i には G_{i-1}^2 によって定義される半順序 p_1 と G_i^2 によって 定義される半順序 p_2 が存在し, p_1, p_2 の 2 つの半順序を 同時に満たす全順序 Q が存在すれば 3 段グラフ $G_{i-1}^2 \cup G_i^2$ を平面的に描写することができ. 従って平面性の条件 (2)

は「 G_i^2 によって定義される V_i 上の半順序 p_1 と G_i^2 によって定義される V_i 上の半順序 p_2 とを同時に満足する全順序 Q が存在すること」といいかえることができる。

[定義] 集合 S 上の2つの半順序 \geq_{p_1} , \geq_{p_2} が両立するとい

われるのは $\forall a, b \in S$ に対し次のいずれかが成立する場合である。

(1) $a \leq_{p_1} b$ かつ $a \leq_{p_2} b$. または

(2) $a \geq_{p_1} b$ かつ $a \geq_{p_2} b$.

[補題4] 集合 S 上の2つの半順序 \geq_{p_1} , \geq_{p_2} が両立するならば, \geq_{p_1} と \geq_{p_2} を同時に満足する S 上の全順序が存在する。

(証明は略する, [TOMI7702] 参照)

補題4により, 2つの半順序を満たす全順序の存在を判定するアルゴリズムがえられる。

アルゴリズム 2

入力: 集合 S 上の2つの半順序 \geq_{p_1} , \geq_{p_2} .

出力: \geq_{p_1} , \geq_{p_2} を同時に満足する S 上の全順序 \geq

(もし存在すれば)

手法: S の要素は \geq_{p_1} によって $a_1^1 = a_2^1 = \dots = a_{x_1}^1 >_{p_1} a_1^2 = \dots = a_{x_{m-1}}^{m-1} >_{p_1} a_1^m = \dots = a_{x_m}^m$, また \geq_{p_2} によって $b_1^1 = b_2^1 = \dots = b_{y_1}^1 >_{p_2} b_1^2 = \dots = b_{y_{m-1}}^{m-1} >_{p_2} b_1^m = \dots = b_{x_m}^m$ と順序づけられているとある, $(x_i, y_i \geq 0)$, また \geq_{p_1} について比較不能な要素を $a_1^{m+1}, a_2^{m+1}, \dots, a_{x_{m+1}}^{m+1}$, \geq_{p_2} について比較不能

な要素を $b_1^{n+1}, b_2^{n+1}, \dots, b_{y_{n+1}}^{n+1}$ とする.

1. ある要素が \succeq_{p_1} に対して a_j^i であり, \succeq_{p_2} に対して b_k^j である時その要素に (i, j) というラベルをつける. ただし, ある要素が \succeq_{p_2} に対して比較不能であり \succeq_{p_1} に対して b_k^j である時には $(*, j)$ というラベルを付す. 同様に, \succeq_{p_1} について a_j^i , \succeq_{p_2} について比較不能な要素にはラベル $(i, *)$ を付す.
2. すべてのとなりあう要素のラベル l_1, l_2 が $l_1 \geq l_2$ となるように要素をソートする. ここでラベルの大小は次によって決められる. すなわち $(i, j) \geq (i', j')$ となるのは $i \geq i', j \geq j'$ となる時およびその時に限る. またラベル $(i, j), (i', j')$ においていずれかが $*$ である場合は比較は他方について行なう. i, j, i', j' おべてが $*$ である場合, 大小関係は適当に定められる. ラベル l_1, l_2 が $l_1 \geq l_2$ でもなく $l_1 \leq l_2$ でもないような2つの要素が存在する時は $\succeq_{p_1}, \succeq_{p_2}$ を満たす全順序は存在しない.

[例] アルゴリズム 2 の適用例を図 11 に示す. (a) は $\succeq_{p_1}, \succeq_{p_2}$ による S の要素の順序付け, (b) はラベル付けされた要素, (c) はラベルの値に従ってソートされた要素, (d) は $\succeq_{p_1}, \succeq_{p_2}$ を同時に満たす全順序 \succeq による S の要素の順序付けである.

[定理 6] アルゴリズム 2 は集合 S 上で与えられた2つの半順序を満足する全順序を (それが存在する場合) 見出し,

その手数は $O(m \log m)$ である. (ただし m は S の要素の数).

(証明) アルゴリズムの

$$S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}$$

正当性は補題 4 より直ち

に導かれる. ラベル付け

$$\begin{aligned} \geq_{P_1} : & a_1 = a_3 \geq_{P_1} a_4 \geq_{P_1} a_5 = a_6 \geq_{P_1} a_7 \geq_{P_1} a_8 = a_9 = a_{10}, a_2 \\ \leq_{P_2} : & a_1 > a_2 = a_3 \geq_{P_2} a_6 \geq_{P_2} a_5 = a_7 = a_{10} \geq_{P_2} a_9 \geq_{P_2} a_8, a_4 \end{aligned}$$

(a)

は $O(m)$ の手数でおこなう

ことができ, ソーティングは例えば

$$a_1 (1, 1) \quad a_1 (1, 1)$$

$$a_2 (*, 2) \quad a_2 (*, 2)$$

$$a_3 (1, 2) \quad a_3 (1, 2)$$

$$a_4 (2, *) \quad a_4 (2, *)$$

$$a_5 (3, 4) \quad a_6 (3, 3)$$

$$a_6 (3, 3) \quad a_5 (3, 4)$$

$$a_7 (4, 4) \quad a_7 (4, 4)$$

$$a_8 (5, 6) \quad a_{10} (5, 4)$$

$$a_9 (5, 5) \quad a_9 (5, 5)$$

$$a_{10} (5, 4) \quad a_8 (5, 6)$$

(b)

(c)

heap sort [KNUT73] を用いることに

より $O(m \log m)$ の手数で実行できる.

[AHO74].

(証明終)

次に段連結な m 段グラフの平面性を

判定するアルゴリズム 3 を与える.

アルゴリズム 3 では, 各 i の部分 2

段グラフの平面性を判定するために

アルゴリズム 1 を, 節点部分集 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_6 \geq a_5 \geq a_7 \geq a_{10} \geq a_9 \geq a_8$

合 V_i 上の 2 つの半順序を同時に

(d)

満足する全順序の存在を判定す

図 11 アルゴリズム 2 の例

るためにアルゴリズム 2 を利用

する. 平面 2 段グラフ $G_i^2 (G_{i-1}^2)$ の平面描写において G_i^2

(G_{i-1}^2) の孤立節点でない節点が $v_1^1 \cdots v_{x_1}^1, v_1^2 v_1^3 \cdots v_{x_3}^3, v_1^4 \cdots$

$v_{x_m}^m (v_1^2, v_1^4, \dots, v_{x_m}^{m-1}$ は $G_i^2 (G_{i-1}^2)$ の幹の上に

ある節点, 他は端節点, また $x_i \geq 0$) の順で配置されている

時 $G_i (G_{i-1})$ が決定する V_i 上の半順序は $v_1^1 = \dots = v_{x_1}^1 > v^2 > v_1^3 = \dots = v_{x_2}^3 > v^4 > \dots > v^{m-1} > v_1^m = \dots = v_{x_m}^m$ となる.

また, $G_i (G_{i-1})$ の孤立節点は比較不能な要素となる.

アルゴリズム 3

入力: 連結な段連結 m 段グラフ $G^m = (V, E, m)$

出力: G^m が平面的かどうか.

手法: 1. G^m の部分 2 段グラフ $G_i^2 = (V_i \cup V_{i+1}, E_i, 2)$ の平面性をテストする. ($i=1, 2, \dots, m-1$). ある i について G_i^2 が非平面的であるなら G^m は非平面的な m 段グラフである.

2. $i=1$ から $m-2$ について

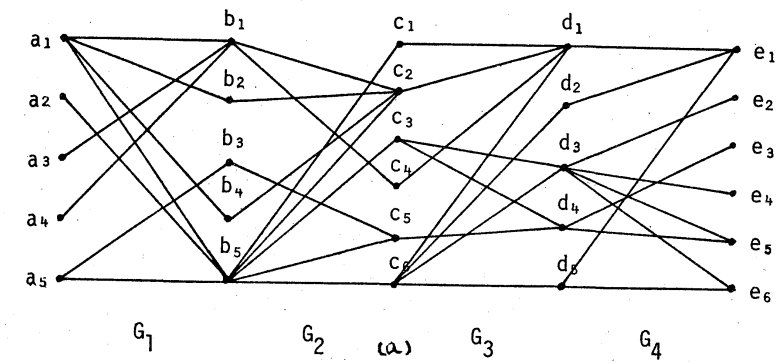
V_i 上の 2 つの半順序 p_1, p_2 (それぞれ G_{i-1}^2, G_i^2 によって定義される) を満足する全順序が存在するかどうかを判定.

そのような全順序が存在しなければ, p_1 , および p_2 の逆の半順序を満足する全順序の存在をしらべる. そのような全順序が存在しなければ G^m は非平面的である.

3. G^m は平面的な m 段グラフである.

[例] アルゴリズム 3 の例を図 12 に示す. (a) は入力グラフ G^4 , (b) は $G_1^2 \sim G_4^2$ が定義する半順序, (c) は G^4 の平面的な描写である.

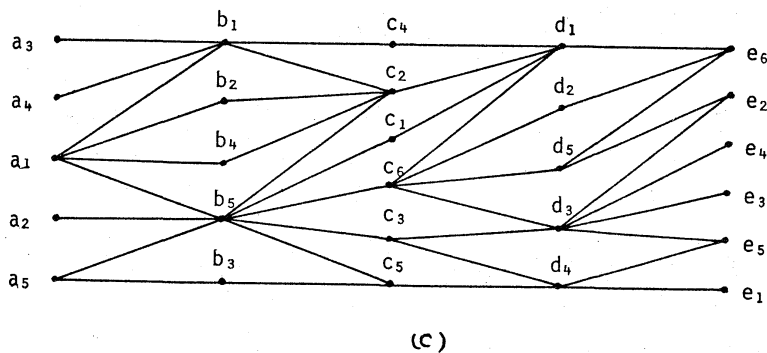
[定理 7] アルゴリズム 3 は連結かつ段連結な m 段グラフの平面性を $O(m|V_m| \log |V_m|)$ の手数で判定する. ただし $|V_m|$ は V_1, \dots, V_m のうちで最大の要素数を含むものの要素数.



$$\begin{aligned}
 G_1^2 & a_3 = a_4 > a_1 > a_2 > a_5 \\
 & b_1 > b_2 = b_4 > b_5 > b_3 \\
 G_2^2 & b_1 > b_2 = b_4 > b_5 > b_3 \\
 & c_4 > c_2 = c_1 = c_6 > c_3 > c_5 \\
 G_3^2 & c_4 = c_2 = c_1 > c_6 > c_3 > c_5 \\
 & d_1 > d_2 = d_5 > d_3 > d_4 \\
 G_4^2 & d_1 = d_2 > d_5 > d_3 > d_4 \\
 & e_6 > e_2 > e_4 = e_3 > e_5 > e_1
 \end{aligned}$$

(b)

図12 アルゴリズム43
の例



(証明) アルゴリズム43の正当性は定理5,6よりただちに導かれる. またアルゴリズム43においてアルゴリズム2は最大 $(m-2) \times 2$ 回実行される. この手数は $O(\sum_{i=1}^{m-1} |V_i| \log |V_i|) \leq O(m|V_m| \log |V_m|)$ である. (証明終)

4.3 PQR-tree

前節で述べたように平面2段グラフ $G^2 = (V_1 \cup V_2, E, 2)$ はその節点部分集合 V_1, V_2 上に半順序を定義する. この半順序を表わすためにこの節では PQR-tree とよばれるデータ構造を導入する. PQR-tree は Booth, Lueker らによって導入された PQ-tree [BOOTH76] の拡張であり, 次節に述べる一般の m 段グ

ラフの平面性判定アルゴリズムにおいて利用される。

[定義] 集合 $U = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ が与えられた時, 集合 U 上の PQR-tree のクラスとは, その葉節点が U の要素であり非葉節点が P -mode, または Q -mode, または R -mode であるようなすべての rooted, ordered tree である。

[定義] PQR-tree T は次の 4 つの条件をすべて満足している時, 正当 (proper) であるという。

1. U のすべての要素が一度ずつ葉節点として出現する。
2. P -mode は少なくとも 2 つの子 (child) をもつ。
3. Q -mode は少なくとも 3 つの子をもつ。
4. R -mode は少なくとも 2 つの子をもつ。

PQR-tree は集合の要素の順列をあらわすためのデータ構造であるから, U の要素が一度も現れなかったり, あるいは 2 度以上現れたりすることは無意味である。上記 1 はそのために設けられた制限である。2 ~ 4 は子を一つしかもたない節点が連続することを防止するための制限である。次に述べるように子を 2 つしか持たない場合 P -mode と Q -mode は全く等価である。2 と 3 はそれを防ぐためにも役立っている。以下では正当な PQR-tree のみを扱う。実際にはアルゴリズムの実行中に正当でない tree が出現することもある。そのような tree は直ちに正当な tree に変形されるものとする。

[定義] PAR-tree T の葉節点の左から右への順列を T の frontier といふ $\text{FRONTIER}(T)$ であらわす。

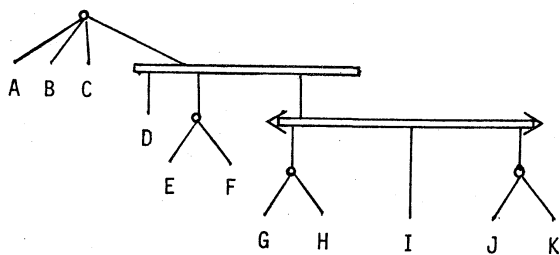


図 13 PAR-tree

[例] 図 13 に集合 $U = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K\}$ の上の正当な PAR-tree の例を示す。この PAR-tree の frontier は ABCDEFGHIJK である。

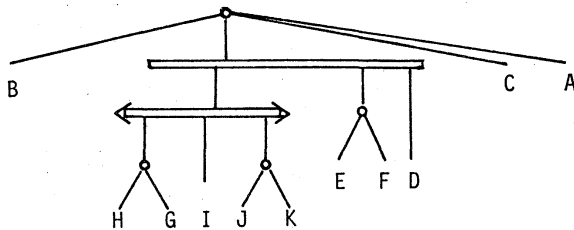


図 14. 図 13 の PAR-tree に同値な PAR-tree

[定義] 2 つの PAR-tree が 同値 で

あるとは一方の tree に 零回 もしくはそれ以上の同値変形をほどこして他方に等しい frontier をもつようにできる時である。

同値変形には次の 2 種類がある。

1. P-mode の子を任意にいかえる。
2. Q-mode の子の全体の順序を逆にする。

[例] 図 14 に図 13 の PAR-tree に同値な tree の例を示す。

[定義] PAR-tree T に同値なすべての PAR-tree の集合を $\text{EQ}(T)$ であらわす。また $\text{EQ}(T)$ に属する PAR-tree の frontier の集合を $\text{CONSISTENT}(T)$ であらわす。

2 つの PAR-tree が同値かどうかを判定するアルゴリズム 4 を次に与える。アルゴリズム 4 は 2 つの tree を左から順に同一の葉節点をもつかどうかを調べていく。

[定義] PQR-tree T の葉節点 v の 継続集合 $SUCCESSOR(v)$ とは (1) v の親が P-mode である時 v のすべての兄弟節点 (sibling node) (2) v の親が Q-mode である時 v の直接の兄弟節点 (immediate sibling) (3) v の親が R-mode である時 v の右側の兄弟節点, ちからなる集合である. そのような節点が存在しない時, $SUCCESSOR(v)$ は T から v を除いてえられる tree T' に同値な tree の集合 $EQ(T')$ の tree において最左葉節点となりうるすべての節点からなる.

アルゴリズム 4

入力: PQR-tree T_1, T_2 .

出力: T_1, T_2 が同値かどうか.

手法: 1. $V \leftarrow EQ(T_1)$ において最左葉節点となりうる節点の集合. $W \leftarrow EQ(T_2)$ において最左葉節点となりうる節点の集合. $V \cap W = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ とする. $V \cap W = \emptyset$ ならば T_1, T_2 は同値でない.

2. $x = x_1$ から x_n につき

$EQUIVALENCE(T_1, T_2, x)$ を適用.

3. T_1, T_2 は同値でない.

$EQUIVALENCE$ は次のような手続きであり, 2つの PQR-tree の最左葉節点が x である時, T_1, T_2 が同値かどうかを判定する.

EQUIVALENCE (T_1', T_2', x')

begin

$V' \leftarrow T_1'$ の SUCCESSOR(x'), $W' \leftarrow T_2'$ の SUCCESSOR(x').

T_1', T_2' から x' をのぞいてとらえる tree を T_1'', T_2'' とする.

T_1'', T_2'' が null tree なら T_1', T_2' は同値である. 終了.

$X' = V' \cap W' = \{x_1', x_2', \dots, x_k'\}$ とする. $X' = \emptyset$ なら return

$x'' = x_1'$ から x_k' につき

EQUIVALENCE (T_1'', T_2'', x'') を適用

end.

4.4 PQR-tree を用いた一般の m 段グラフの平面性判定アルゴリズム

この節では一般の m 段グラフの平面性判定アルゴリズム, アルゴリズム 6 を与える. 定理 4 より m 段グラフ G^m は (1) その $m-1$ 個の部分 2 段グラフがすべて平面的であり, かつ (2) すべての G_i^2 を平面的に描写するような各 V_i の節点の順列が存在する時およびその時のみ平面的である. アルゴリズム 6 では (2) の条件をみたす節点の順列が存在するかどうかを調べるために前節で導入した PQR-tree を用いる.

一般の m 段グラフの平面性は段連結な m 段グラフとは異なる.

1), 隣りあう部分2段グラフどうしの関係だけを調べて判定することはできない. 図15(a)に示す4段グラフ(部分2段グラフ G_1^2 が非連結)においては G_1^2, G_2^2, G_3^2 はすべて平面的な2段グラフである. また G_1^2, G_2^2 の平面性を保つ V_2 の順列, G_2^2, G_3^2 の平面性を保つ V_3 の順列が存在する. しかし全体の4段グラフ G^4 は非平面的である. 図15(b)に示すように, グラフの連結成分の"向き"は全体のグラフから決めるべきもので, 隣接する1つの2段グラフのみからは決定できない場合もある. すなわち図15(b)においては G_2^2 の下側の連結成分の節点で V_2 に属するものはすべて G_1^2 の端節点となっているためこの連結成分の"向き"は G_1^2 からだけでは決定できない.

アルゴリズム4.6では, 各々の部分2段グラフ $G_i^2 = (V_i \cup V_{i+1}, E_i, 2)$ ($i=1, 2, \dots, m-1$) の平面性を判定し(アルゴリズム4.1), 次に各々の2段グラフ G_i^2 が V_i, V_{i+1} に定義する半順序とあわす PQR-tree を構成する(アルゴリズム4.5 — 後述), さらに G_i^2 のうちから連結であるグラフ G_m^2 を選び, G_m^2 を平面的に描写しその節点の順列を固定した下で, G_{m+1}^2, \dots, G_1^2 ,

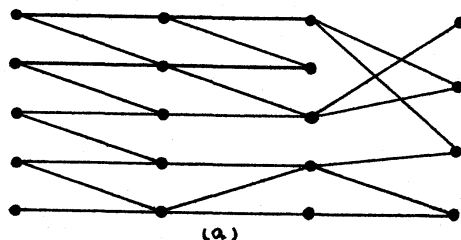
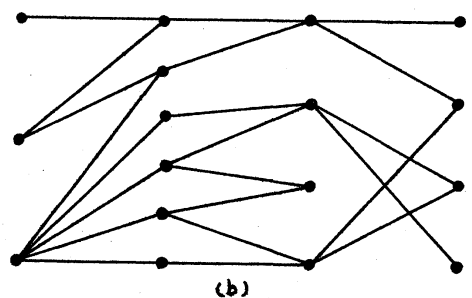


図15 一般の m 段グラフ



G_{m-1}, \dots, G_1 が平面的に描写できるかどうかを順に調べていく。(これは2つのPQR-treeが同値かどうかを判定することと等価)。 V_{m+1}, V_{m+2}, \dots 等の節点の順列を固定できる場合はPQR-treeのmodeをR-modeに変更することによってそのことをあらわす。前述のように部分グラフの"向き"が決定できない場合には、PQR-treeのP-mode, Q-modeをそのままにしておくことによってそれを実現する。

まず、平面2段グラフ $G^2 = (V_1 \cup V_2, E, 2)$ が V_1, V_2 上に定義する半順序とそのfrontierとしてあらわすPQR-tree $T^L(G^2), T^R(G^2)$ を構成するアルゴリズムを示す。

アルゴリズム 5

入力: 平面2段グラフ $G^2 = (V_1 \cup V_2, E, 2)$

出力: PQR-tree $T(G)$, V_1 に対してアルゴリズムが適用された時にえられるtree $T^L(G)$ の $\text{CONSISTENT}(T^L(G))$ は $TT^L(G^2)$ と一致し, V_2 に対して適用された時にえられるtreeの $\text{CONSISTENT}(T^R(G))$ は $TT^R(G)$ と一致する。

手法: V ($V = V_1$ または V_2) の孤立節点以外の節点は節点直線上で $v_1 v_2 \dots v_m$ の順にならんでいるとする。

1. G^2 が非連結グラフなら $T(G)$ の根節点はP-modeとなる。

その後は以下の手続2~3を G の各々の連結成分に対して適用することにより得らるPQR-subtreeである。

2. 以下では連結グラフに対する PQR-tree T' を求める.
根節点を Q-mode, Q^R とする.

3. $i = 1$ から n' について

v_i が G^2 の幹 (trunk) 上にある節点ならば v_i は T' の左から i 番目の葉節点となるように, Q^R の子として配置される.
 v_i が G^2 の幹上にはない節点 (すなわち端節点) であれば,
 v_i は v_{i+1}, \dots, v_{l+1} (l は v_l が G^2 の幹上にある節点であるような最小の数, ただし $i < l \leq n'$) と共に P-mode の下に配置される. その P-mode は v_i が T' の i 番目の葉節点となるように Q^R の下に配置される.

[例] アルゴリズム 5 の適用例を図 16 に示す. (b) の PQR-tree $T^L(G^2)$ は アルゴリズム 5 を (a) の 2 段グラフ $G^2 = (V_1 \cup V_2, E_1, 2)$ の節点部分集合 V_1 に適用して得られた tree, (c) は V_2 に適用してえられた tree $T^R(G^2)$ を示す.

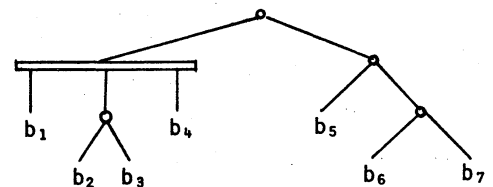
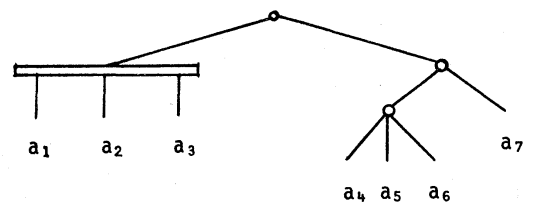
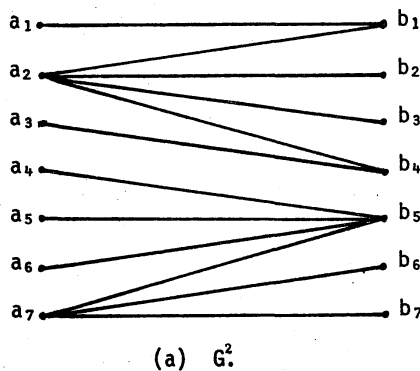


図 16. アルゴリズム 5 の例

[定理 9] 平面的な 2 段グラフ $G^2 = (V_1 \cup V_2, E, 2)$ の節点部分集合 V_1 (V_2) にアルゴリズム 5 を適用して得られる PAR-tree を $T^L(G^2)$ ($T^R(G^2)$) とすると $\text{CONSISTENT}(T^L(G^2))$ ($\text{CONSISTENT}(T^R(G^2))$) は $\Pi^L(G^2)$ ($\Pi^R(G^2)$) と一致する.
(証明 略. [TOMI7802] 参照).

[定義] 平面的な 2 段グラフ G^2 にアルゴリズム 5 を適用してえられた PAR-tree $T^L(G^2)$ と $T^R(G^2)$ において, 次のいずれかの条件が成立している時 $T^L(G^2)$ の節点 m と $T^R(G^2)$ の節点 n は 対応している といわれる. 1. m, n はそれぞれ $T^L(G^2)$, $T^R(G^2)$ の根節点である. 2. m は $T^L(G^2)$ の subtree T_1 の根節点であり, n は $T^R(G^2)$ の subtree T_2 の根節点である. ただし T_1, T_2 は G^2 の同一の連結成分に対して構成された PAR-subtree である.

アルゴリズム 6

入力: 連結な m 段グラフ $G^m = (V, E, m)$

出力: G^m が平面的な m 段グラフかどうか.

手法: 1. $i = 1$ から $m - 1$ について

$G_i^2 = (V_i \cup V_{i+1}, E_i, 2)$ が平面的かどうかを判定する.

ある i について G_i^2 が非平面的なら G^m は非平面的.

2. $i = 1$ から $m - 1$ について

アルゴリズム 5 を G_i^2 の V_i, V_{i+1} に適用して 2 つの

planar-tree $T^L(G_i^2)$, $T^R(G_i^2)$ を構成.

3. G_m^2 を選ぶ. (m は G_m^2 が連結な 2 段グラフであるような最小数. $T^L(G_m^2)$ と $T^R(G_m^2)$ の根節点を R-mode に変える.

4. $i = m-1$ から 1 について.

$T^L(G_{i+1}^2)$ と $T^R(G_i^2)$ が同値かどうかを判定. (ただし, この時一方のみに含まれている葉節点 — 孤立節点に対応 — があればそれを除いた後にアルゴリズム 4 を適用). もし同値でなければ, G_m^2 は非平面的な m 段グラフである. 同値であれば, $T^L(G_{i+1}^2)$, $T^R(G_i^2)$ に両者が同一の frontier をもつように同値変形を施す. $T^R(G_i^2)$ の根節点とすべての Q-mode を R-mode に変える. ただし下記の [場合 1] の 1 ~ 4 のいずれかに該当する mode はそのままにしておく. $T^R(G_i^2)$ の R-mode に 対応する $T^L(G_i^2)$ の mode を R-mode に変える.

5. $j = m+1$ から $m-1$ について

$T^R(G_{j-1}^2)$ と $T^L(G_j^2)$ が同値かどうかを判定. (一方のみに含まれる葉節点を除いた後にアルゴリズム 4 を適用). もし同値でなければ, G_m^2 は非平面的である. 同値であれば, $T^R(G_{j-1}^2)$, $T^L(G_j^2)$ に両者が同一の frontier をもつように同値変形を施す. $T^L(G_j^2)$ の根節点とすべての Q-mode を R-mode に変える. ただし下記の [場合 2] の 1 ~ 4 のいずれかに該当する mode はそのままにしておく. $T^L(G_j^2)$ の

R-modeに対応する $T^R(G_j^2)$ の mode を R-modeにかえる.

6. G^A は平面的な n 段グラフである.

[場合1]

1. その子孫 (descendant) がすべてある 1つの $T^L(G_{i+1}^2)$ の P-modeの子であるような $T^R(G_i^2)$ の根節点の P-mode.
2. その子孫がすべてある 1つの $T^L(G_{i+1}^2)$ の P-modeの子であるような $T^R(G_i)$ の Q-mode.
3. その子孫がすべてある 1つの $T^L(G_{i+1}^2)$ の Q-modeの子であるような $T^R(G_i)$ の Q-mode.
4. $T^R(G_i^2)$, $T^L(G_{i+1}^2)$ の根節点 p とともに P-modeであり, (それぞれ p_1, p_1' とし, その子である subtree を それぞれ $T_1, T_1', \dots, T_s, T_1', T_2', \dots, T_s'$ とする) かつ次の等式が成立する場合の $T^R(G_i^2)$ の根節点 p_2' .

$$S = S' \text{ かつ } \text{FRONTIER}(T_i) = \text{FRONTIER}(T_i') \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

[場合2]

1. その子孫がすべてある 1つの $T^R(G_j^2)$ の P-modeの子であるような $T^L(G_{j-1}^2)$ の根節点の P-mode.
2. その子孫がすべてある 1つの $T^R(G_j^2)$ の P-modeの子であるような $T^L(G_{j-1}^2)$ の Q-mode.
3. その子孫がすべてある 1つの $T^R(G_j^2)$ の Q-modeの子であるような $T^L(G_{j-1}^2)$ の Q-mode.

4. $T^R(G_j^2)$, $T^L(G_{j-1}^2)$ の根節点が p -mode であり (それぞれ P_2 , P_2' としその子である subtree をそれぞれ T_1, T_2, \dots, T_s , T_1', T_2', \dots, T_s' とする) かつ次の等式が成立する場合の $T^L(G_{j-1}^2)$ の根節点 P_2' . $S = S'$, $\text{FRONTIER}(T_i) = \text{FRONTIER}(T_i')$ ($i=1, 2, \dots, s$).

[場合1] の 1 ~ 4 の例を図17に示す.

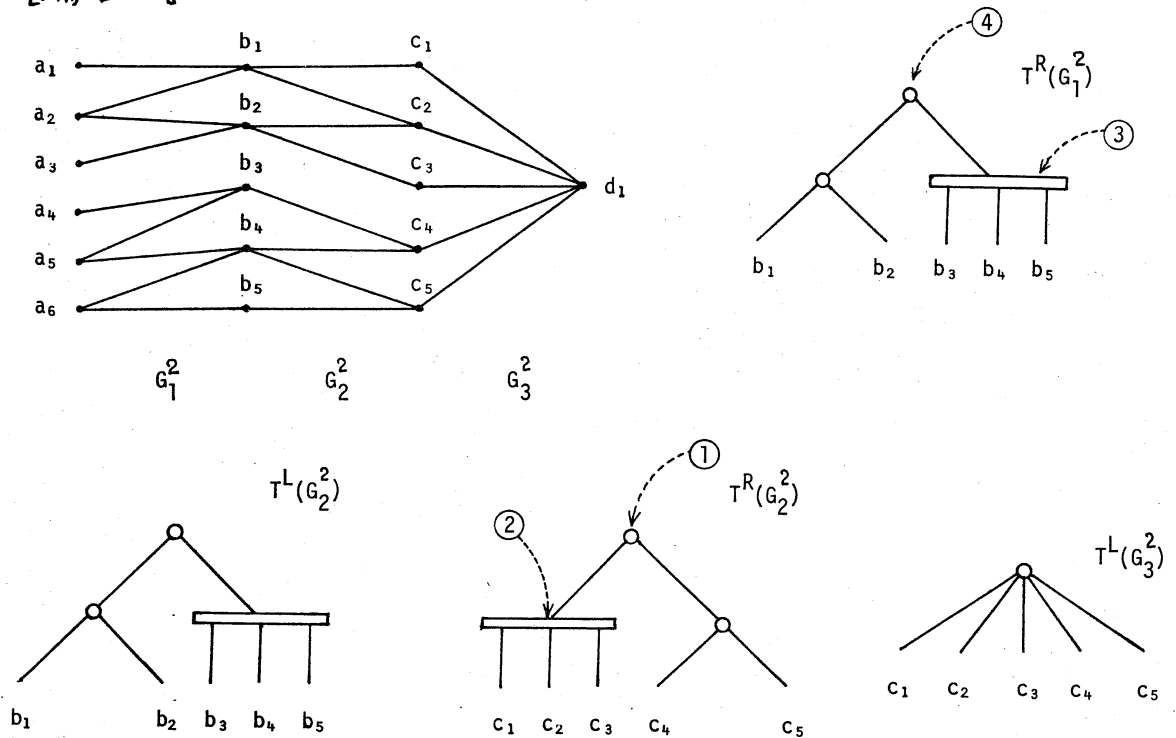
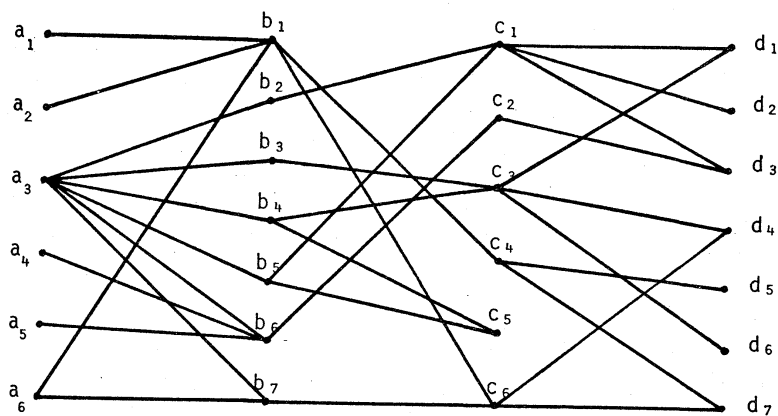


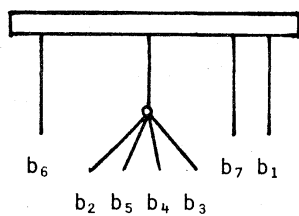
図17 場合1の図示.

アルゴリズム6の例を図18に示す. (a)は入力の4段グラフ G^4 , (b)-(e)は G^4 の各部分2段グラフに対して構成された PQR -tree. (f)-(i)はアルゴリズムの適用によって変換された PQR -treeである. $T^L(G_2^2)$ と $T^R(G_2^2)$ の Q -mode は条件

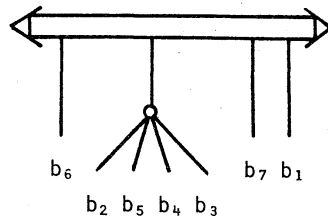
図 18
アルゴリズム 6
の例.



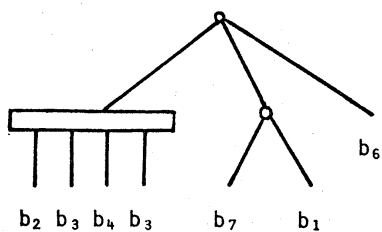
(a)

 $T^R(G_1^2)$


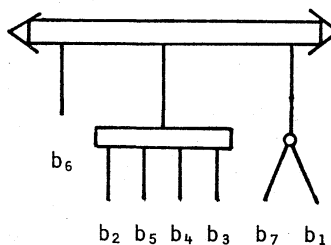
(b)

 $T^R(G_1^2)$


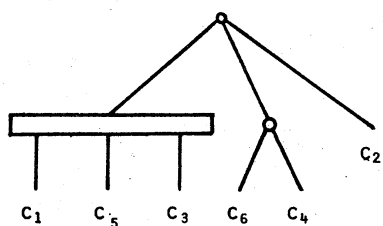
(f)

 $T^L(G_2^2)$


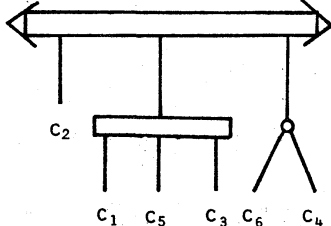
(c)

 $T^L(G_2^2)$


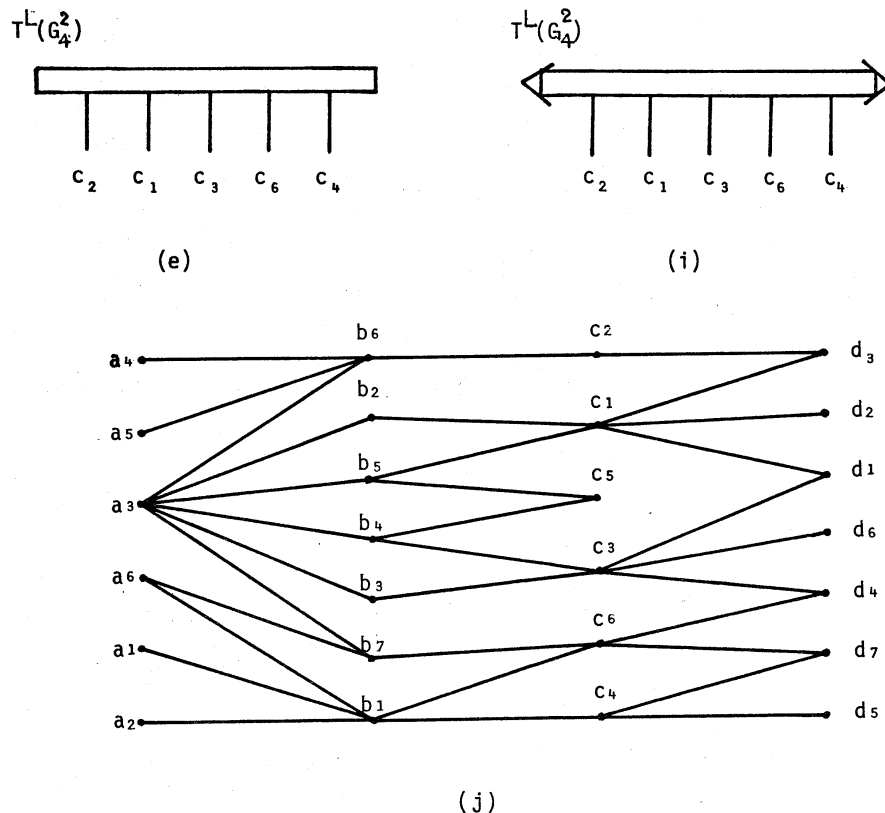
(g)

 $T^R(G_3^2)$


(d)

 $T^R(G_3^2)$


(h)



2 の 1 に該当するため R-mode には変換されない。 G^4 は (j) に示すように平面的な 4 段グラフと判定される。

5. あとがき

本稿では、 n 段グラフなるグラフを導入し、その平面性判定のアルゴリズムについて述べた。

現在、 n 段グラフの平面化問題（非平面的なグラフ G から最小数の枝を取り除いて平面的な G の部分グラフを得る問題）についても考察を進めている。既に発表した 2 段グラフの平面化問題に対する結果 [TOMI7707], [TOMI7711] を応用し

た, 分枝限定法 (branch and bound method) を用いた方法について検討を加えている.

謝辞 御討論いただいた田中克己氏はじめ矢島研究室の諸氏に感謝いたします.

参考文献

- [AH074] Aho, A.V., Hopcroft, J.E. and Ullman, J.D., The design and analysis of computer algorithms, Addison Wesley, 1974.
- [BOOT76] Booth, K.S. and Lueker, G.S., Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using PQ-tree algorithms, Journal of Computer and System Sciences, vol. 13, pp. 335-379, 1976.
- [DE074] Deo, N., Graph theory with applications to engineering and computer science, Prentice-Hall, 1974.
- [HARA69] Harary, F., Graph theory, Addison Wesley, 1969.
- [HOPC74] Hopcroft, J.E. and Tarjan, R., Efficient planarity testing, JACM, vol. 21, No. 4, pp. 549-568, October 1974.
- [KAMB77] 上林, 田中, 林, 矢島, メモリ必要量が $O(n)$ であるような節点数 n の Tree 出力アルゴリズムとその文献システムへの応用, 電子通信学会 総合全国大会, 1114, 1977.
- [KNUT73] Knuth, D.E., The art of computer programming, vol. 3, Sorting and Searching, Addison-Wesley, 1974.
- [RUBI75] Rubin, F., An improved algorithm for testing the planarity of a graph, IEEE, Transactions on Computers, vol. C-24, No. 2, pp. 113-121, 1975.
- [TOMI7707] 富井, 上林, 矢島, 2段グラフの平面化について, 夏のLA シンポジウム, 1977.
- [TOMI7711] Tomii, N., Kambayashi, Y. and Yajima, S., On planarization algorithms of 2-level graphs, 電子通信学会 計算機研究会 技術報告, EC 77-38, 1977.
- [TOMI7802] Tomii, N., Planarity testing and planarization of n-level graphs, 京都大学工学部 修士論文, 1978.
- [WARF77] Warfield, J.N., Crossing theory and hierarchy mapping, IEEE, Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, vol. SMC-7, No.7, pp. 505-523, July 1977.